

# El fenómeno de "scaling" en los sistemas kársticos

## Scaling in karstic systems

C. Paredes (\*), A. Mangin (\*\*), A. Eraso (\*\*\*) y Fco. J. Elorza (\*)

(\*) Depto. de Matemática Aplicada y Métodos Informáticos. E.T.S.I. de Minas. C/Ríos Rosas 21. Madrid 28003. (Spain).

(\*\*) Centre de Recherches Souterraines et Edaphiques. Laboratoire Souterrain du CNRS. Moulis, Saint Girons 09200. (France)

(\*\*\*) Depto de Ingeniería Geológica. Cátedra de Hidrogeología. E.T.S.I. de Minas C/Ríos Rosas 21. Madrid 28003. (Spain).

### ABSTRACT

*In this work we present a different systematic methodology to analyse the geomorphology of the karstic cave systems, with the aim to show how the same behaviour, in roughness, appears at different working scales. This scaling effect could be understood as a fractal character of the morphology. So, first of all a self similar or self affine fractal scaling must be identified in the cave, and the scale interval where it takes place. After an appropriate fractal analysis, is done by means of an Inverse Box Counting Method (MIBC), as presented in Paredes (1995). Finally, we study the area-perimeter, and the results we get show as the fractal behaviour in whole cave system. This study is applied to the Cap de la Lesse karstic cave system.*

**Key words:** fractal, karst, caves, box counting, analysis.

Geogaceta, 20 (6) (1996), 1393-1396  
ISSN:0213683X

De los sistemas hidrogeológicos más complejos que se conocen son los acuíferos kársticos los que figuran entre los primeros puestos. Tanto su estudio como su conceptualización y, en ciertos casos, su simulación, son un reto tanto para el hidrogeólogo, de campo y de gabinete, como para el matemático aplicado, que pretende crear modelos matemáticos estructurales o funcionales para su simulación. Habitualmente estos acuíferos poseen un desarrollo espacial en forma de cavidades y huecos, fruto de esta disolución, que no es bien conocido. Se pueden encontrar muchos estudios aplicados a dichos sistemas, algunos de ellos reflejados en Ford y Williams (1989), recogen la idea de la dependencia de las propiedades de los acuíferos kársticos, como sistemas que se desarrollan preferentemente dentro de los macizos calizos con efectos dinámicos de disolución o karstificación, según la escala de observación, lo cual se encuentra en íntima relación con la distribución de los huecos kársticos en el macizo y las geomorfologías endokársticas.

En muchas ocasiones y, en parte, motivado por la observación en las múltiples experiencias de los espeleólogos, se ha constatado que dichas formas, tanto a pequeña escala (como las agregados dendríticos de carbonatos precipitados), como a gran escala (en forma de galerías), poseen una semejanza, en función de la irregularidad que describen, que no solo no depende de la escala de observación, sino que además puede ser independiente de la ubicación dentro del mismo macizo karstificado. Esta invarianza de formas ha sido ya constatada a mediados de los años 80 por diversos autores como Eraso (1986) y en Mangin (1986), donde empieza a presumirse que dicho comportamiento puede ser debido, primero, a fenómenos que actúan igual a diferentes escalas y, segundo, a un comportamiento invariante al cambio de escalas, que permite observar estructuras muy semejantes independientemente de la escala de estudio.

### El fenómeno de scaling como comportamiento fractal

La característica importante de la variabilidad espacial de la heterogeneidad de los medios kársticos (que condiciona su permeabilidad, porosidad, coeficiente de almacenamiento y otros parámetros hidrogeológicos), que marca la distribución del agua en el acuífero, puede decirse que es de tipo jerárquico. Esto es, a medida que el fenómeno se estudia en más detalle, más y más escalas se ven involucradas en el mismo. Por ello, las leyes características empleadas para los parámetros de los acuíferos porosos no pueden adoptarse, porque se encuentran basados en el concepto de volumen elemental representativo, lo que presupone que se pueda realizar una homogeneización macroscópica del sistema, algo que en los acuíferos kársticos es impracticable. El comportamiento de estos parámetros se ha constatado que sigue una ley de tipo potencia (power-law), como en Clauser (1992), entre las escalas de laboratorio e in situ, característica de los fenómenos que se distribuyen de forma fractal tal como se aprecia en Mangin (1986), y posteriormente en Feder (1988) y en Falconer (1990).

Este comportamiento de scaling, de tipo fractal por su ley en función de la escala, ha sido ya estudiado por diversos autores para determinar las características fractales de galerías y cuevas, como en Sustersic (1983) para la extrapolación de longitudes posibles, y Laverty (1987) para el cálculo de la dimensión fractal sobre la traza unidimensional de la cueva, aplicando una técnica más primitiva que las que se pueden encontrar en Klinkenberg (1994), debido a las deficiencias en las topografías. Asimismo, en Paredes (1993) puede encontrarse un intento de simulación de una red kárstica, utilizando la traza unidimensional de la caverna, basada en los denominados Sistemas L. Nada se menciona a propósito de las implicaciones que el

comportamiento de éste tipo puede tener en las amplias estructuras en el macizo calizo que se encuentra karstificado. Además, sin hacer distinción entre el tipo de comportamiento fractal observado, Mandelbrot (1985), las técnicas tanto de análisis como de extrapolación pueden estar mal aplicadas en muchos de los estudios revisados.

Dicha distinción se aplica, de hecho, a todas las estructuras fractales, tanto determinadas como estocásticas o aleatorias, permitiendo constituir en sí misma una clasificación. Los fractales según la característica de su comportamiento al cambio de escala pueden diferenciarse en autosemejantes y autoafines. Por ello, en el presente trabajo se presentan una serie de técnicas, ya aplicadas en otros campos como en el análisis unidimensional de perfiles topográficos, que permiten diferenciar en qué escalas se da el comportamiento autosemejante o autoafín de la estructura estudiada. Una vez hecha esta diferenciación, deben ser aplicadas las técnicas de análisis apropiadas a cada caso. Entre estas últimas se aplicará la denominada de MIBC, presentado en Paredes (1995). Esta técnica permitirá la comparación entre sí de los resultados entre estructuras semejantes del mismo macizo rocoso presentado mediante un ejemplo que corresponde.

### Interpretación de la autoafinidad - autosemejanza.

Tal y como se ha mencionado anteriormente, los fractales poseen un comportamiento ante un cambio de escala que, según se realice en las direcciones del espacio que los contiene, diferencia unos de otros en autosemejantes o autoafines. Atengámonos, entonces en primer lugar, al análisis de este comportamiento. Para diferenciar una estructura fractal autoafín de una autosemejante, analicemos primero su definición, lo que permitirá su identificación. Un conjunto  $E$  es estadística-

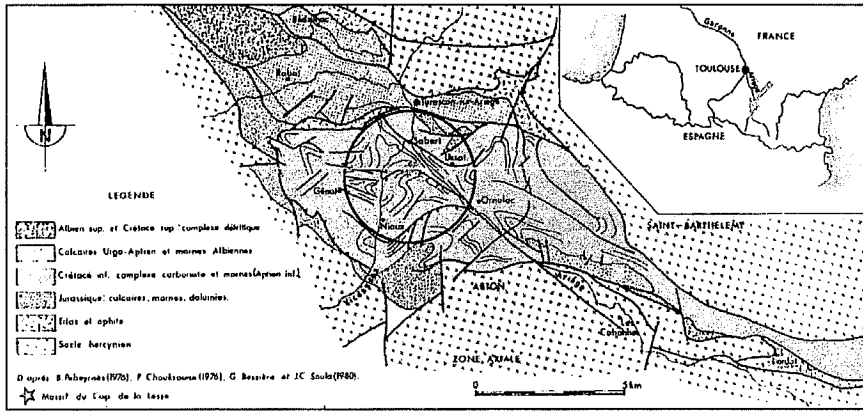


Fig. 1.- Esquema geológico regional del sistema de Cap de la Lesse, según Sorriaux (1982)

Fig. 1.- Regional geological map of the Cap de la Lesse system, after Sorriaux (1982)

mente autoafin cuando se encuentra formado por la unión finita de versiones disjuntas rescaladas del mismo, cuyo ratio r de rescalado es diferente  $r_i \neq r_j$  según las n direcciones del espacio que lo contiene. Esto es:

$$E \subset \mathcal{R}^n; E \equiv \bigcup_{k=1}^N E_k; \bigcap_{k=1}^N E_k = \emptyset; E_k = r \cdot E$$

lo que quiere decir que cada punto  $x \in E$  pasa a ser un punto  $x' \in E_k$ , en el que:

$$x' = (r_1 \cdot x_1, r_2 \cdot x_2, \dots, r_n \cdot x_n) = r \cdot x$$

Pero, en el caso de que todos los  $r_i = r_j$ , la transformación por homotecia (1), de cada  $E_k$ , se efectúa con igual ratio r en todas las direcciones. Resultando que E es un conjunto estadísticamente autosemejante, y por lo tanto cada  $E_k = r \cdot E$ , y un punto  $x \in E$  modifica su posición a  $x'$  según:

$$x' = (r \cdot x_1, r \cdot x_2, \dots, r \cdot x_n) = r \cdot x$$

Como se puede apreciar en las mismas, el caso de autosemejanza es un caso particular de la autoafinidad en la que los ratios de homotecia son iguales.

De los métodos para diferenciar de forma práctica cual es el comportamiento que posee una estructura, es posible utilizar el desarrollado en Matsushita *et al.* (1989) y Matsushita *et al.* (1991). El fundamento de esta técnica, denominada LSM, se encuentra en estudiar la variación con la longitud L, o escala tomada, de las desviaciones estandar  $\sigma$  de las coordina-

esta expresión puede encontrarse en Paredes (1995), a partir de Mandelbrot (1985). El valor obtenido de H, también denominado exponente de Hurst por la relación existente entre los procesos fractales y los que presentan un efecto de Hurst (vía identificación de los mismos con un movimiento browniano fraccionario), depende de la dimensión fractal (de Hausdorff, que se asemeja a la de recubrimiento) D.

Además, las diferencias en la ordenada en que pueden darse en la variación de las desviaciones estandar  $\sigma$  con la escala L, permiten identificar el ratio de anisotropía en las coordenadas, de utilidad en el estudio de la direccionabilidad del contorno.

**Análisis fractal de estructuras cerradas autosemejantes.**

El estudio del comportamiento fractal autosemejante de las estructuras debe de realizarse evaluando la medida de Hausdorff  $H^s(E)$ , cuya expresión nos indica que la medida s-dimensional de un conjunto E corresponde con la suma de los tamaños de una serie de conjuntos U que lo recubren de forma óptima. Para evaluar esta medida y, por lo tanto, para obtener el valor de la dimensión fractal de recubrimiento D de E, debe de encontrarse cómo cambia la medida de Hausdorff de E en función de la escala (según una power-law). Esta evaluación se realiza mediante las técnicas conocidas como de conteo que suelen denominarse en la bibliografía como de conteo

timación se basa en el hecho de que la variación con la escala del número de celdas que realizan un recubrimiento efectivo  $N(\epsilon)$  verifican que:

$$N(\epsilon) \propto \epsilon^{-D}$$

Para proceder, una vez discretizado el cuerpo E, al análisis, se deben de definir una escala mínima y otra escala máxima de trabajo. La escala mínima  $\epsilon_{min}$  (habitualmente conocida como inner-cutoff) puede estar definida por la escala de discretización, que corresponda, en el caso de perímetros discretizados en puntos, con la mayor distancia entre dos puntos digitalizados. A escalas inferiores a ésta los resultados no tendrían significación por lagunas en los espaciados de los datos. La escala máxima  $\epsilon_{max}$  (o también outer-cutoff) se define como aquella para la cual la estructura se comporta como una entidad cuya dimensión fractal es la euclídea, esto es, la del espacio que lo acoge (que en el caso que aquí se analiza es el plano, esto es 2). Entre ambas escalas es donde deberá ser aplicado el algoritmo de cálculo de  $N(\epsilon)$ .

En la práctica, la forma clásica de llevar a cabo dicho conteo se elabora partiendo de la escala máxima, realizando una malla con tamaño dicha escala sobre E, y contar el número  $N(\epsilon)$  de celdas que contienen al menos un elemento de E. Es posible pasada esta primera iteración el disminuir el tamaño de malla, esto es, refinar a una nueva escala, normalmente la mitad de la anterior, y contar  $N(\epsilon)$  de nuevo. Este proceso iterativo se lleva hasta que  $\epsilon = \epsilon_{min}$ . La dimensión fractal se calculará identificando las zonas donde se verifique (6), y en ellas, a partir de la pendiente de la recta:

$$\log N(\epsilon) = A - D \cdot \log \epsilon; \text{ tal que } \epsilon \in [\epsilon_{min}, \epsilon_{max}]$$

Este proceso, que parece sencillo a simple vista y ejecutable manualmente para pocos  $N(\epsilon)$ , resulta bastante tedioso cuando el rango de escalas, de hasta  $\epsilon_{max}$  es amplio o cuando  $N(\epsilon)$  se hace muy grande (ya que crece potencialmente con la reducción de escala). Además éste es algorítmicamente complicado de implementar en un código de ordenador, lo cual es interesante cuando se desea automatizar el conteo, además que para cada escala es preciso evaluar si cada celda contiene un elemento de E. La táctica para el cálculo efectivo de  $N(\epsilon)$ , se denomina Método Inverso de Box Counting, ó también MIBC, y consiste en efectuar un seguimiento inverso de la metodología clásica, Paredes (1995).

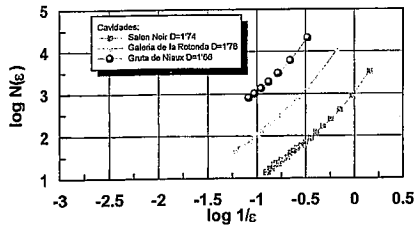


Fig. 3. Diagrama de los resultados de aplicar MIBC a la gruta de Niaux.

Fig. 3. Log-Log plot of the results from MIBC, with Niaux data.

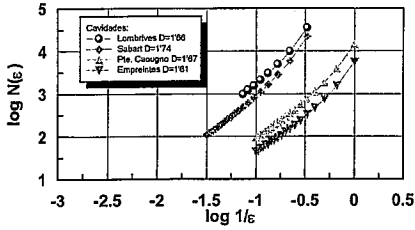


Fig. 4. Diagrama de los resultados de aplicar MIBC al resto de grutas.

Fig. 4. Log-Log plot of the results from MIBC to the other caves.

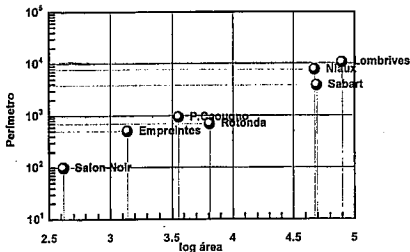


Fig. 5.- Diagrama de los resultados del estudio de la relación Area-Perímetro

Fig. 5.- Log-Log plot of the global area vs. perimeter data

**El análisis área - perímetro y su importancia a la escala del macizo**

Los resultados obtenidos sobre el área (o volumen en su caso) a una escala determinada, proporcionados por la técnica de box-counting, y transformados según  $A(\epsilon) = N(\epsilon) \cdot \epsilon^2$ , y con los resultados obtenidos de aplicar las técnicas de análisis de perímetros  $P(\epsilon)$  expuestas en Klinkenberg (1994), es posible establecer una relación entre ambos, que es la relación área-perímetro, Mandelbrot (1975), en la que para una escala  $\epsilon$ :

$$P(\epsilon) \propto A(\epsilon) \cdot \epsilon^{D_p/12}$$

donde  $D_{AP}$  se hace corresponder con la dimensión fractal  $D_p$  del perímetro. Pero ocurre que en la práctica, los exponentes que se obtienen del análisis de  $P(\epsilon) \propto \epsilon^{-D_p}$  de contornos autosemejantes no corresponden con estimaciones de la dimensión fractal ni de recubrimiento  $D$ , ni  $D_p$ . Solamente el exponente de  $(P(\epsilon) \propto \epsilon^{-D_p})$ , puede ser utilizado como estimación real de la dimensión fractal  $D_p$  si la  $D=2$ , Cheng (1995). En el caso de que se obtenga  $D < 2$ , entonces el exponente:

$$D_p < D_{AP} = 2 \cdot D_p / D$$

Este tipo de análisis ya fue utilizado en Reams (1992), para el estudio de la dimensión

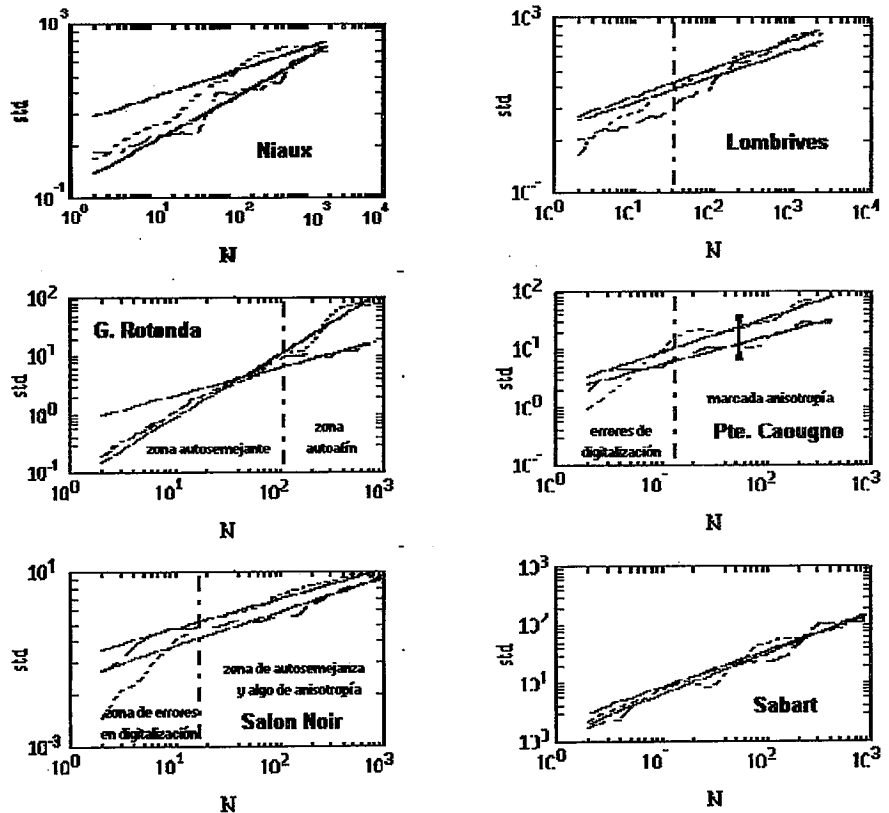


Fig. 6.- Diagramas resultado del análisis por LSM de las s de las coordenadas

Fig. 6.- LSM resulting plots

fractal de la distribución de tamaños de dolinas en seis áreas de los Estados Unidos. Pero no tiene en cuenta la relación mostrada en (9), porque no calcula  $D$  ni  $D_p$  para cada dolina. El interés que se persigue en este trabajo, con su utilización en el análisis de las geometrías bidimensionales de las cuevas, esta en demostrar prácticamente cómo puede servir de prueba de que el comportamiento de las diversas estructuras cartografiadas se agrupan alrededor de  $P(\epsilon)$ , con lo que permite asegurar que, cada una a su escala, la irregularidad de cada una es igual a la del conjunto. Este hecho se demostrará en el ejemplo que se trata a continuación.

**Aplicación e interpretación del caso de Cap de la Lesse**

La cuenca de Tarascon (Ariège) se encuentra al sur de Francia (figura 1), sobre los Pirineos franceses, formando los valles de los ríos Ariège y Videssos, que la atraviesan de SE a NW y de SW a NE, respectivamente. Se trata de una cuenca de tipo sedimentario, rellena con materiales detríticos carbonatados y margas, y rodeada de macizos rocosos cristalinos del Hercínico. Esta cuenca se encuentra en su mayoría formada por calizas del Aptien inferior, con zonas que la rodean constituidas por margas y dolomías del Jurásico y margas del Albiense.

En ella se encuentra el macizo calcáreo de Cap de la Lesse (figura 2), también conocido como de Saoudière, con una serie de fenómenos patentes de karstificación extensa, ocupando la parte meridional de dicha cuenca.

Las cavidades encontradas son numerosas: Niaux, Lombrides, Petite Caugno, Empreintes y Sabart (que son objeto de este ejem-

plo práctico para la aplicación de las técnicas anteriormente descritas), constituyendo el sistema denominado de Niaux-Lombrives-Sabart, y que totaliza 9 Km. de galerías exploradas por el hombre (algunas de ellas mostrando restos de pinturas prehistóricas en sus paredes). El macizo abarca una extensión de aproximadamente 3'62 km<sup>2</sup>, y las grutas que hay en él se encuentran en un estadio de paleokarst, a unos 600 m. sobre el nivel del mar.

Las cinco grutas anteriores han sido digitalizadas según sus contornos, más una galería (Galería de la Rotonda), marcada con un círculo en la figura 2, y un fondo de saco (Salon Noir) pertenecientes a Niaux. La utilización de estos dos últimos nos permitirá ver qué efectos pueden surgir del análisis de zonas descritas con mayor detalle, y por lo tanto si existen diferencias apreciables entre estructuras a diferentes escalas.

Como se desarrolló anteriormente, el primer estudio que debe de ejecutarse es el referente a la determinación del carácter de la fractalidad de cada contorno. Para ello se aplica el análisis LSM, cuyos resultados se muestran gráficamente en la figura 6. En cada gráfica se representa  $std$ , que corresponde con las de las coordenadas  $(x,y)$ , vs.  $N$  que es el número de puntos recorridos en el perímetro, y que pudiera corresponderse aproximadamente con la  $\epsilon_{escogida}$ . En puntos se representa y con trazo discontinuo  $\sigma_x$ ; las rectas que figuran de trazo continuo son los ajustes a las ecuaciones del LSM. Como se puede observar, existe una anisotropía marcada en los casos de Niaux, Salon Noir y Pte. Caugno, que se detecta por la separación entre las rectas de  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ . La autosemejanza se visualiza fácilmente a escalas que van más allá de las de detalle por el paralelismo entre las rectas de ajuste, aunque

en alguno de los ejemplos el paralelismo desaparezca, lo que ocurre a muy baja escala (algo que era de esperar).

En el caso de Niaux, la anisotropía, que puede apreciarse a simple vista en la traza del contorno, es muy intensa entre las escalas del orden de 10<sup>1</sup>N hasta 10<sup>3</sup>N, pero a escalas inferiores se disipa. En cambio la autosemejanza es muy evidente, si bien los ajustes con (4) no lo muestran, una revisión más detallada de cada permite afirmar que son paralelas. Para la Galería de la Rotonda, se da una situación inversa a la esperada, si bien se muestra autosemejanza a pequeña escala, es autoafín a escalas superiores a los 10<sup>2</sup>N, con lo que habrá que tener la precaución de que en el análisis MIBC posterior la escala máxima no supere a la aquí determinada. Por otro lado es evidente la isotropía en todo el rango de escalas de comportamiento autosemejante. En el caso del Salon Noir, que correspondería al perímetro topografiado con mayor detalle dentro de la gruta de Niaux, su comportamiento es fundamentalmente autosemejante e isótropo (aunque se constate una anisotropía muy leve), a partir de las 10N, ya que a escalas inferiores lo que se aprecia es que hay un efecto de digitalización. El caso de Lombrives es sencillo de interpretar ya que en todo el rango estudiado es autosemejante y prácticamente isótropo. Petite Caougno, al igual que el Salon Noir, y debido a su pequeño tamaño, presenta el efecto de los errores en la digitalización, que desaparecen a partir de los 10N. A partir de esta escala, el comportamiento es autosemejante pero con marcada anisotropía. Finalmente el caso de Sabart, sencillo de entender como el de Lombrives, presenta el mismo comportamiento. De los ajustes con las ecuaciones del LSM se han obtenido los respectivos exponentes V<sub>x</sub>, (Tabla I anterior), que permitirán obtener el valor de la dimensión fractal del perímetro, vía el exponente de Hurst H apropiado.

**Resultados numéricos de V<sub>x</sub>, V<sub>y</sub> para cada gruta del análisis por LSM.**

Una vez identificadas las respectivas escalas de comportamiento autosemejante, es posible aplicar el algoritmo de MIBC a cada estructura. Este análisis nos proporciona el valor de la imensión fractal de recubrimiento, a partir del ajuste de la recta dentro del correcto intervalo, donde N(ε)αε<sup>-D</sup> se verifique. Inicialmente el análisis ha sido aplicado sobre las cavidades de una misma caverna, para apreciar el efecto, si es que éste existe, del aumento de la resolución de algunas partes de la misma. Los resultados obtenidos se pueden seguir en la figura 9. En primer lugar hay que advertir que tal efecto es inapreciable y que en todo el rango de escalas analizado, puede decirse que se verifica (6). Los resultados de las respectivas dimensiones fractales de recubrimiento para estas tres primeras cavidades se encuentran en la Tabla II anterior.

**Resultados numéricos del MIBC: dimensión fractal de recubrimiento.**

Como se puede ver en la tabla II, las dimensiones obtenidas para cada estructura individualmente son semejantes entre sí, con una media del orden de 1'7, pero lo único que nos permite afirmar el MIBC es que la estructura, independientemente del resto, es de tipo fractal y de irregularidad invariante al cambio

Cavidad	V <sub>x</sub>	V <sub>y</sub>
Salon Noir	0'67	0'77
Gal. Rotonda	1'00	0'47
Niaux	0'58	0'99
Lombrives	0'64	0'58

Cavidad	V <sub>x</sub>	V <sub>y</sub>
Sabart	0'62	0'70
Empreintes	0'75	0'32
Pte. Caougno	0'59	0'48

Tabla I.- Resultados numéricos de V<sub>x</sub>, V<sub>y</sub> para cada gruta del análisis por LSM.

Cavidad estudiada.	Dimensión fractal de recubrimiento.	Cavidad estudiada.	Dimensión fractal de recubrimiento.
Salon Noir	1'74	Gruta de Sabart	1'74
Galería de la Rotonda	1'78	Gruta de Petite Caougno	1'67
Gruta de Niaux	1'66	Gruta de Empreintes	1'61
Gruta de Lombrives	1'66		

Tabla II.- Resultados numéricos de MIBC: dimensión fractal de recubrimiento.

de escala. La forma de asociar las cavidades entre sí, es asociar para cada escala, tomándose la mínima común a todas ellas, el perímetro medido en la digitalización con el área que proporciona el MIBC a dicha escala. Al representar los resultados como un diagrama perímetro vs. área (figura 5), puede afirmarse, sin dudar, que se disponen sobre una recta, que tal recta corresponde con un comportamiento del tipo P(ε) ∝ A(ε) • ε<sup>D<sub>MIBC</sub></sup>, y que a la vista de los resultados del MIBC es posible aplicar (9). Por lo tanto, a parte de que cada estructura kárstica se comporte como un fractal en el espacio, de tipo generalmente autosemejante, la fractalidad se extiende a todas las escalas, desde la que corresponde al menos a la de topografía del Salon Noir, hasta la que origina la extensión de la gruta de Lombrives (la de mayor extensión).

Por lo tanto, es posible evidenciar que es primordial el realizar un análisis del carácter fractal de las estructuras a analizar, debido a que pueden cometerse errores tanto en la aplicación de técnicas especialmente diseñadas para casos, por ejemplo como se ha utilizado aquí, autosemejantes, como en las interpretaciones que pueden hacerse de los resultados obtenidos. Por lo tanto un análisis para diferenciar, primero el carácter autoafín y/o autosemejante, y segundo en qué intervalo de escalas se verifican respectivamente, permitirá mejorar en gran medida la calidad y la veracidad de los resultados e interpretaciones. Se ha mostrado cómo la técnica denominada LSM es apta para tal finalidad, proporcionando además información, tanto sobre el carácter direccional, en forma de ratio de isotropía-anisotropía de las curvas perimetrales, como de las escalas en las que puede haber errores en la digitalización que producen lagunas en los datos de las coordenadas.

**Agradecimientos**

El trabajo de investigación expuesto esta siendo realizado y subvencionado dentro del convenio DMAMI (E.T.S.I. de Minas) - ENRESA nº 0700443 dentro del Proyecto de investigación denominado Desarrollo de modelos numéricos para la simulación de procesos que tengan lugar en la geosfera; Área de Simulación del Medio Geológico. Así mismo, esta línea se encuentra incorporada dentro de las correspondientes de Investigación y Desarrollo del Grupo de Trabajo sobre el Cambio Global G.T.C.G. Igualmente se desea agradecer al Laboratoire Souterrain du CNRS de Francia los datos de la espeleo-topografía de Cap de la Lesse facilitados para la realización de este trabajo.

**Referencias**

Bakalowicz, M.; Mangin, A. [1980] *Mém. h. sér. Soc. Géol. France* 11: 71-79.  
 Cheng, Q. [1995] *Mathematical geology* 27 (1): 69-82.  
 Clauser, C. [1992] *EOS Transactions of the American Geophysical Union*. 73 (21).  
 Curl, R.L. [1986] *Mathematical Geology* 18 (8): 765-783.  
 Eraso, A. [1986] *Journees sur le Karst en Euskadi* 2,p.  
 Falconer, K. [1990] *John Willey & Sons*. Chichester.  
 Feder, J. [1988] *Plenum Press*. New York.  
 Ford, D.C; Williams, P.W. [1989] *Uwin Hyman*. London.  
 Klinkenberg, B. [1994] *Mathematical Geology* 26 (1): 23-46.  
 Laverty, M. [1987] *Earth Surface Processes and Landforms* 12: 475-480.  
 Mandelbrot, B.B. [1975] *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* 72 (10): 3825-3828.  
 Mandelbrot, B.B. [1985] *Physica Scripta* 32: 260-267.  
 Mangin, A. [1986] *Proceedings Jornadas sobre el Karst en Euskadi*. San Sebastian: 11-30.  
 Matsushita, M.; Ouchi, S. [1989] *Physica D* 38: 246-251.  
 Matsushita, M.; Ouchi, S.; Honda, K. [1991] *Journal of the Physical Society of Japan* 60 (7): 2109-2112.  
 Paredes, C.; Eraso, A.; Chacon, E. [1993] *Espeleotemas* 3(3): 3-16.  
 Paredes, C. [1995] *Tesis. Depto. Matemática Aplicada y Métodos Informáticos. E.T.S.I. de Minas*. Madrid.  
 Reams, M.W. [1992] *Geomorphology* 5: 159-165.  
 Sorriaux, P. [1982] *Thèse 3º ciclo. Laboratoire Souterrain du C.N.R.S*. Moulis.  
 Sustersic, F. [1983] *Preprint. Proceedings of New Trends in Speleology*. Dobrihovice.